

**Zur Theorie
der Intervallableitung
reeller Funktionen**

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Gerhard Friedel

aus Isny

1968

Druck:
ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e. V.
DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE
1 Berlin 33, Garystr. 45

**Zur Theorie
der Intervallableitung
reeller Funktionen**

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Gerhard Friedel

aus Isny

1. Referent : Prof. Dr. A. Dinghas

2. Referent : Prof. Dr. H. Pachale

Tag der mündlichen Prüfung : 11. Juli 1968

Tag der Promotion :

28. OKT. 1968



Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn
Professor Dr. Alexander Dinghas, möchte
ich für die Anregung zu dieser Arbeit
und sein freundliches Interesse während
der Anfertigung herzlich danken.

Gerhard Friedel



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
EINLEITUNG.	1
1. UNTERSUCHUNGEN FÜR FUNKTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN.	9
1.1. Definition der Intervallableitung. Ihre Beziehungen zur gewöhnlichen und symmetrischen Ableitung.	9
1.2. Eine äquivalente Definition.	25
1.3. Beziehungen der Intervallableitung zur Taylor- , Peano- und zur Distributionenableitung.	30
2. UNTERSUCHUNGEN FÜR FUNKTIONEN VON ZWEI VERÄNDERLICHEN.	38
2.1. Partielle Ableitungen und ihre Vertauschbarkeit.	38
2.2. Polynomeigenschaften der partiellen Intervallableitungen.	47
LITERATUR.	57

EINLEITUNG.

In der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts begründeten I. NEWTON und G. W. LEIBNIZ die Differentialrechnung. Der von ihnen zugrunde gelegte Ableitungsbegriff ist der bis heute allgemein übliche. Deshalb wird diese Art der Ableitung auch als gewöhnliche Ableitung bezeichnet.

Durch Konvergenzuntersuchungen bei trigonometrischen Reihen wurde B. RIEMANN auf einen anderen Ableitungsbegriff geführt, den man heute als symmetrische, Riemannsche oder auch Schwarzsche Ableitung bezeichnet. Ist f eine auf dem offenen Intervall I definierte reellwertige stetige Funktion, so ist die n -te symmetrische Ableitung $S^n f(x)$ von f im Punkt $x \in I$ definiert durch

$$S^n f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x - \frac{n}{2} h + jh).$$

RIEMANN bewies in seiner Habilitationsschrift ([27], S. 232) :

Es sei $\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ eine trigonometrische Reihe, welche im Punkt x_0 die Summe $f(x_0)$ besitzt. Dann existiert für die durch zweimalige glied-

weise Integration der Reihe entstandene stetige Funktion

$$F(x) := \frac{1}{4} a_0 x^2 - \sum_{k=1}^{\infty} n^{-2} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \text{im Punkt}$$

x_0 die zweite symmetrische Ableitung $S^2 F(x_0)$, und es gilt : $S^2 F(x_0) = f(x_0)$.

H. A. SCHWARZ zeigte ([33], S.341), daß eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ definierte reellwertige stetige Funktion, deren zweite symmetrische Ableitung in $]a,b[$ existiert und identisch verschwindet, eine lineare Funktion auf $[a,b]$ ist. Dieser Satz wurde von CH. J. DE LA VALLEE-POUSSIN wie folgt erweitert ([36], Bd. II, S.122) : Es sei f eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$. Bis auf höchstens endlich viele Punkte besitze f überall in $]a,b[$ eine zweite symmetrische Ableitung und diese sei summierbar ($S^2 f \in L([a,b])$). Dann gilt:

$$f(x) = c_1 + c_2 x + \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} S^2 f(t) dt \quad (x \in [a,b])$$

(c_1, c_2 Konstanten).

Ist f eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ definierte reellwertige stetige Funktion, deren n -te symmetrische Ableitung in $]a,b[$ überall existiert und identisch verschwindet, so folgt nicht notwendig, daß f ein Polynom höchstens vom Grad $n-1$ ist. Dieses Problem wurde von M.RIESZ [28], S. VERBLUNSKY [37] und

S. SAKS [29] für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ behandelt. Dabei zeigte sich, daß die Funktion f ein Polynom ist, wenn man zusätzlich voraussetzt, daß f im Intervall $]a, b[$ $(n-2)$ -mal gewöhnlich differenzierbar ist. Dies führte auf die folgende Vermutung von P. L. BUTZER und W. KOZAKIEWICZ ([5], S.578): Es sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte reellwertige stetige Funktion, welche in $]a, b[$ $(n-2)$ -mal gewöhnlich differenzierbar ist. In $]a, b[$ existiere die n -te symmetrische Ableitung von f und diese sei beschränkt und summierbar ($S^n f \in L([a, b])$). Dann gilt für $x \in]a, b[$

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \int_c^x dt_1 \dots \int_c^{t_{n-1}} S^n f(t) dt, \quad ,$$

wobei $P_{n-1}(x)$ ein Polynom höchstens vom Grad $n-1$ und $c \in]a, b[$ ist.

Ein Spezialfall dieser Vermutung konnte von C. KASIMATIS [14] bewiesen werden. Weitere Ergebnisse über den Zusammenhang zwischen der symmetrischen und der gewöhnlichen Ableitung n -ter Ordnung erhielten A. MARCHAUD [16], W. T. REID [26] und P. L. BUTZER [3], [4]. S. N. MUKHOPADHYAY [18], [19], [20], [21] untersuchte speziell die symmetrische Ableitung erster Ordnung.

Eine wichtige Eigenschaft der gewöhnlichen n -ten Ableitung enthält der Satz von TAYLOR, wonach eine in einem abgeschlossenen Intervall n -mal gewöhnlich diffe-

renzierbare Funktion lokal bis auf ein Restglied durch ein Polynom n-ten Grades dargestellt werden kann, dessen Koeffizienten durch die Ableitungen der Funktion im Entwicklungspunkt gegeben sind. J. L. LAGRANGE, A. L. CAUCHY [7] und O. SCHLÖMILCH [30] gaben Restglieder für Funktionen an, welche im Intervall $[x_0, x_0+h]$ n-mal und im Intervall $]x_0, x_0+h[$ (n+1)-mal gewöhnlich differenzierbar sind. G. PEANO [25] konnte ein allgemeines Restglied angeben für Funktionen, welche im Intervall $[x_0, x_0+h]$ (n-1)-mal und im Punkt x_0 n-mal gewöhnlich differenzierbar sind. Es gilt dann :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^k + \frac{h^n}{n!} \varepsilon(x_0, h) ,$$

wobei $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x_0, h) = 0$.

Dies ist der Ausgangspunkt für zwei weitere Ableitungsbegriffe, welche in der Approximationstheorie von Bedeutung sind. Ist f eine auf dem offenen Intervall I definierte reellwertige stetige Funktion und $x_0 \in I$, so besitzt f in x_0 eine n-te Peanoableitung $f^{\text{InI}}(x_0)$, wenn es Zahlen $f^{\text{I1I}}(x_0), \dots, f^{\text{InI}}(x_0)$ gibt, so daß gilt:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} f^{\text{IkI}}(x_0) h^k + \frac{h^n}{n!} \varepsilon(x_0, h)$$

wobei $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(x_0, h) = 0$.

Die Peanoableitung wurde von CH. DE LA VALLEE-POUS-SIN in einer Untersuchung über die Approximation reeller

Funktionen durch gewisse Polynome und Fourierreihen [35] eingeführt. A. DENJOY [8] untersuchte die Peanoableitung bezüglich einer speziellen Menge und im Zusammenhang mit verallgemeinerten Differentialquotienten und deren Integration (Totalisation). J. MARCINKIEWICZ und A. ZYGMUND [17] erhielten Ergebnisse über die Beziehung zur symmetrischen Ableitung. Die Rolle der Peanoableitung bei der Summation von trigonometrischen Reihen wurde von A. ZYGMUND [39] dargestellt. W. OLIVER [24] zeigte, daß Peanoableitungen, welche überall in einem abgeschlossenen Intervall existieren, alle Eigenschaften besitzen, die man sinnvollerweise von einer Ableitung verlangen kann.

Bei der Definition der n -ten Taylorableitung einer auf dem offenen Intervall I definierten reellwertigen stetigen Funktion f im Punkt $x_0 \in I$ wird vorausgesetzt, daß f in x_0 $(n-1)$ -mal gewöhnlich differenzierbar ist. Die n -te Taylorableitung von f in x_0 ist dann definiert durch

$$f^{(n)}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} n! h^{-n} (f(x_0+h) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x_0)).$$

Der Begriff der Taylorableitung entstammt der Theorie der Halbgruppen linearer Operatoren auf einem Banachraum (vgl. [13], S.267; [2], S.111). Er erwies sich als vorteilhaft bei der Untersuchung des Randverhaltens von Lö-

sungen partieller Differentialgleichungen (P. L. BUTZER und H. G. TILLMANN [6]). Für reellwertige stetige Funktionen untersuchte P. L. BUTZER [4] den Zusammenhang zwischen der gewöhnlichen, der symmetrischen und der Taylorableitung.

Die Intervallableitung wurde von A. DINGHAS [9] in einer Arbeit über gewöhnliche Differentialgleichungen eingeführt. Ist f eine auf dem offenen Intervall I definierte reellwertige stetige Funktion, so ist die n -te Intervallableitung von f im Punkt $x_0 \in I$ erklärt durch

$$D^n f(x_0) := \lim_{\substack{b-a \rightarrow 0 \\ a, b \in I}} \frac{n^n}{(b-a)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f\left(\left(1 - \frac{j}{n}\right)a + \frac{j}{n}b\right)$$

Wie bei der symmetrischen Ableitung erhält man also die n -te Intervallableitung ohne Kenntnis der vorangehenden Ableitungen durch einen einmaligen Grenzübergang. Beim Grenzübergang sind alle Intervalle zugelassen, welche den Punkt x_0 enthalten. Das schränkt die Existenz des Grenzwertes stark ein, ist jedoch der Grund dafür, daß eine Funktion, deren n -te Intervallableitung in einem abgeschlossenen Intervall identisch verschwindet, dort ein Polynom höchstens vom Grad $n-1$ ist ([9], S. 11). Dieses Ergebnis sowie die Tatsache, daß aus der Existenz von $f^{(n)}(x_0)$ die Existenz von $D^n f(x_0)$ folgt, ist ein wichtiger Teil der Arbeit von DINGHAS und Ausgangspunkt der vorliegenden Dissertation.

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird versucht, die Intervallableitung in die oben besprochenen Ableitungsbegriffe einzuordnen. Im Abschnitt 1.1. werden die Verbindungen zur gewöhnlichen und zur symmetrischen Ableitung hergestellt. An zwei Beispielen zeigt sich, daß die Intervallableitung einerseits schwächer als die gewöhnliche, andererseits stärker als die symmetrische Ableitung ist. In 1.2. wird eine Definition der Intervallableitung angegeben, welche zur Definition von DINGHAS äquivalent ist. Aus diesem Äquivalenzsatz ergibt sich dann sehr leicht eine Verbindung zum verallgemeinerten Differentialquotienten im Sinne von DENJOY sowie - in Abschnitt 1.3. - die Beziehung zur Peanoableitung. Unabhängig hiervon werden in 1.3. außerdem hinreichende Bedingungen für die Existenz der Ableitung im Sinn der Distributionentheorie von L. SCHWARTZ [31] angegeben.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit partiellen Ableitungen bei Funktionen von zwei reellen Veränderlichen. Von H. A. SCHWARZ [32] wurde ein Vertauschungssatz für gewöhnliche partielle Ableitungen zweiter Ordnung bewiesen. A. MARCHAUD [16] gab Vertauschungssätze für partielle gewöhnliche und symmetrische Ableitungen höherer Ordnung an. In 2.1. werden zunächst partielle Ableitungen im Sinn der Taylor-, Peano- und Intervalldiffe-

rentiation definiert und im Anschluß daran Vertauschungssätze bewiesen. In 2.2. werden Polynomeigenschaften der partiellen Intervallableitung studiert. Eine Funktion, für welche sämtliche partiellen Intervallableitungen n -ter Ordnung in einem Gebiet identisch verschwinden, ist ein Polynom in x und y höchstens vom Grad $n-1$. Dieser Satz wird durch die Erweiterung des Beweisverfahrens von DINGHAS auf zwei Dimensionen bewiesen.

1. UNTERSUCHUNGEN FÜR FUNKTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN.

1.1. Definition der Intervallableitung. Ihre Beziehungen zur gewöhnlichen und symmetrischen Ableitung.

Es sei f eine auf dem offenen Intervall I der reellen Geraden definierte reellwertige stetige Funktion. Es sei $x_0 \in I$ und $J = [a, b]$ mit $a < b$ ein in I enthaltenes abgeschlossenes Intervall, so daß $x_0 \in]a, b[$. Man betrachte den Differenzenquotienten n -ter Ordnung

$$(1) \quad D^n(J, f) := (b-a)^{-n} n^n \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f\left(\left(1 - \frac{j}{n}\right)a + \frac{j}{n}b\right).$$

Setzt man $h := x_0 - a$, $k := b - x_0$, so läßt sich (1) in der Form schreiben :

$$(2) \quad D^n(J, f) = \frac{n^n}{(h+k)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f\left(x_0 - h + \frac{j}{n}(h+k)\right).$$

$=: D^n(x_0, h, k; f)$, wobei $h+k > 0$ wegen $a < b$.

Mit DINGHAS ([9], S.10) erhält man folgende

Definition 1. Es sei f eine reellwertige stetige Funktion auf dem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, und es sei $x_0 \in I$. Existieren die Grenzwerte

$$\underline{D}^n f(x_0) := \lim_{h+k \rightarrow 0} D^n(x_0, h, k; f) \quad \text{und}$$

$$\bar{D}^n f(x_0) := \overline{\lim_{h+k \rightarrow 0}} D^n(x_0, h, k; f),$$

so heiße $\underline{D}^n f(x_0)$ die untere und $\bar{D}^n f(x_0)$ die obere n -te Intervallableitung von f im Punkt x_0 .

Gilt die Gleichung $\underline{D}^n f(x_0) = \bar{D}^n f(x_0)$, so sei der gemeinsame Wert mit $D^n f(x_0)$ bezeichnet und heiße die n -te Intervallableitung oder Intervallableitung n -ter Ordnung von f im Punkt x_0 .

Lemma 1. Es sei f eine auf dem offenen Intervall I definierte reellwertige stetige Funktion. Dann gilt: $D^1 f(x_0)$ existiert für ein $x_0 \in I$ genau dann, wenn $f'(x_0)$ existiert. Es gilt dann: $D^1 f(x_0) = f'(x_0)$.

Beweis. Daß aus der Existenz von $f'(x_0)$ die Existenz von $D^1 f(x_0)$ und die Gleichheit der beiden Zahlen folgt, ist ein Spezialfall eines Ergebnisses von DINGHAS ([9], S.17, Hilfssatz 4 für $n = 1$).

Es existiere umgekehrt $D^1 f(x_0)$. Für festes x_0 ist $D^1(x_0, h, k; f)$ eine Funktion der beiden reellen Veränderlichen h und k mit $h \geq 0$ und $k \geq 0$. Für festes $h > 0$ ist $D^1(x_0, h, k; f)$ eine stetige Funktion von k . Also existiert für alle $h > 0$

$$D_1^1(x_0, h; f) := \lim_{k \rightarrow 0} D^1(x_0, h, k; f) = \frac{1}{h}(f(x_0) - f(x_0 - h)).$$

Da auch $\lim_{h+k \rightarrow 0} D^1(x_0, h, k; f)$ existiert, folgt somit aus

einem Satz über Doppellimites (s. etwa [10], Bd. I, S.339) die Existenz des Grenzwerts $\lim_{h \rightarrow 0} D_1^1(x_0, h; f)$ und die

$$\text{Gleichung: } \lim_{h \rightarrow 0} D_1^1(x_0, h; f) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} D^1(x_0, h, k; f) =$$

$$= \lim_{h+k \rightarrow 0} D^1(x_0, h, k; f) = D^1 f(x_0) .$$

Im Punkt x_0 existiert also die gewöhnliche linksseitige Ableitung von f und stimmt mit $D^1 f(x_0)$ überein. Indem man zuerst den Grenzübergang bezüglich h und anschließend den bezüglich k durchführt, erhält man analog dazu die Existenz der rechtsseitigen gewöhnlichen Ableitung von f im Punkt x_0 und ihre Gleichheit mit $D^1 f(x_0)$. Daraus folgt : $f'(x_0)$ existiert, und es gilt $f'(x_0) = D^1 f(x_0)$.

Setzt man in (2) $h = k$, so erhält man als Spezialisierung gerade den Ausdruck $S^n(x_0, h; f) := D^n(x_0, h, h; f)$, der auf die symmetrische Ableitung führt. Damit gilt

Lemma 2 . Besitzt f im Punkt x_0 eine n -te Intervallableitung, so existiert auch die n -te symmetrische Ableitung von f in x_0 und es gilt :

$$(3) \quad D^n f(x_0) = S^n f(x_0) .$$

Daß die symmetrische Ableitung echt schwächer ist als die Intervallableitung, wird weiter unten anhand eines Beispiels demonstriert werden.

Beim Beweis von Lemma 1 wurde gezeigt, daß mit $D^1 f(x_0)$ auch die Grenzwerte $\lim_{h \rightarrow 0} D^1(x_0, h, 0; f) =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} D_1^1(x_0, h; f)$ und $\lim_{k \rightarrow 0} D^1(x_0, 0, k; f) = \lim_{k \rightarrow 0} D_r^1(x_0, k; f)$
 (analog dazu) existieren. Dieser Sachverhalt gilt auch für Intervallableitungen höherer Ordnung, da auch für

$n > 1$ $D^n(x_0, h, k; f)$ für $h+k > 0$ eine stetige Funktion von h und k ist. Mit $D^n f(x_0)$ existieren also auch die Limes $\lim_{h \rightarrow 0} D^n(x_0, h, 0; f)$ und $\lim_{k \rightarrow 0} D^n(x_0, 0, k; f)$ und sind einander gleich. Das legt folgende Definition nahe :

Definition 2. a) Existiert im Punkt x_0 der Limes $D_1^n f(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} D^n(x_0, h, 0; f)$, so soll $D_1^n f(x_0)$ die linksseitige n -te Intervallableitung von f an der Stelle x_0 heißen.

b) Existiert im Punkt x_0 der Grenzwert $D_r^n f(x_0) := \lim_{k \rightarrow 0} D^n(x_0, 0, k; f)$, so soll $D_r^n f(x_0)$ die rechtsseitige n -te Intervallableitung von f an der Stelle x_0 heißen.

Damit läßt sich der bisher nur für offene Intervalle definierte Begriff der Intervallableitung auf abgeschlossene Intervalle erweitern. Für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ und eine auf diesem definierte reellwertige stetige Funktion f versteht man unter der n -ten Intervallableitung von f in a die rechtsseitige und in b die linksseitige Intervallableitung n -ter Ordnung von f in a bzw. b .

Lemma 3. Besitzt die stetige Funktion f in jedem Punkt des abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ eine n -te Intervallableitung, so ist $D^n f$ eine Funktion der ersten Baireschen Klasse auf $[a, b]$.

Beweis. Für festes $h+k > 0$ ist $D^n(., h, k; f)$ eine

stetige Funktion auf $[a, b]$. Wählt man für $h+k$ eine positive Nullfolge, so ist $D^n f$ auf $[a, b]$ die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen und mithin eine Funktion der ersten Baireschen Klasse.

Da stetige Funktionen meßbar sind und die Grenzfunktion einer Folge von meßbaren Funktionen ebenfalls meßbar ist, gilt auch

Lemma 4. Besitzt die stetige Funktion f in jedem Punkt des Intervalls $[a, b]$ eine n -te Intervallableitung, so ist $D^n f$ auf $[a, b]$ meßbar.

In den nun folgenden Sätzen werden Beziehungen zwischen der gewöhnlichen Ableitung und der Intervallableitung untersucht.

Satz 1. Es sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte reellwertige stetige Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- (i) f ist in $[a, b]$ im gewöhnlichen Sinn n -mal stetig differenzierbar;
- (ii) in $[a, b]$ existiert die n -te Intervallableitung von f und ist stetig;
- (iii) die n -te Intervallableitung existiert gleichmäßig in $[a, b]$.

Beweis. (i) $\implies$ (ii) : Nimmt man für die gewöhnliche bzw. für die Intervall - Ableitung n -ter Ordnung in den Randpunkten eines abgeschlossenen Intervalls jeweils die einseitige gewöhnliche bzw. Intervall - Ablei-

tung n -ter Ordnung, so gilt der Satz von DINGHAS ([9], Hilfssatz 4, S. 17) in der Form :

Lemma 5. Hat die stetige Funktion f in jedem Punkt x des Intervalls $[a, b]$ eine gewöhnliche n -te Ableitung, so existiert $D^n f$ auf $[a, b]$ und für alle $x \in [a, b]$ gilt : $D^n f(x) = f^{(n)}(x)$.

Der Beweis dieses Lemmas verläuft wie der des entsprechenden Hilfssatzes bei DINGHAS mit der Modifikation, daß man sich in den Randpunkten des Intervalls auf einseitige Ableitungen beschränken muß.

Aus Lemma 5 folgt unmittelbar, daß (i) stets (ii) impliziert.

$$(ii) \Rightarrow (i) : \text{Es sei } f^*(x) := \int_a^x (x-t)^{n-1} D^n f(t) dt .$$

$$\text{Mit } D^n f \text{ ist auch } \int_a^x D^n f(t) dt =: f_1(x) \text{ auf } [a, b]$$

stetig und somit R-integrierbar. Setzt man für $i = 1, \dots,$

$$n-1 : f_i(x) := \int_a^x f_{i-1}(t) dt \text{ und } f_0(x) := D^n f(x), \text{ so}$$

erhält man wegen $f_1(a) = \dots = f_{n-1}(a) = 0$ für $n \geq 2$

durch partielle Integration und für $n = 1$ direkt

$$f^*(x) = \int_a^x (n-1)! f_{n-1}(t) dt =$$

$$= (n-1)! \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} dt_n D^n f(t_n) .$$

Der Ausdruck in der vorangehenden Zeile ist n -mal stetig differenzierbar im gewöhnlichen Sinn. Es gilt also nach

$$\text{Lemma 5 : } f^{*(n)}(x) = D^n f^*(x) = (n-1)! D^n f(x) \quad (x \in [a, b]) .$$

Es sei $g := \frac{1}{(n-1)!} f^*$. Dann gilt wegen der Additivität des Operators D^n für alle $x \in [a, b]$: $D^n(g-f)(x) = 0$. Nach Hilfssatz 1 aus DINGHAS [9], S.11 ist somit $g-f$ ein Polynom P_{n-1} vom Grad $s \leq n-1$. Folglich ist $f = g - P_{n-1}$ im gewöhnlichen Sinn n -mal stetig differenzierbar, und es gilt : $D^n f(x) = f^{(n)}(x)$ für $x \in [a, b]$.

(ii) $\implies$ (iii) : Da $D^n f$ in $[a, b]$ stetig ist, ist $D^n f$ dort gleichmäßig stetig und existiert daher gleichmäßig.

(iii) $\implies$ (ii) : Da f stetig ist, sind die Differenzenausdrücke für festes $h+k > 0$ stetige Funktionen auf $[a, b]$. Existiert $D^n f$ gleichmäßig im ganzen Intervall $[a, b]$, so ist $D^n f$ als Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen selbst eine stetige Funktion.

Satz 2. Es sei $f \in C([- \pi, + \pi])$ eine Funktion der Periode 2π . Im Intervall $[- \pi, + \pi]$ besitze f eine summierbare n -te Intervallableitung $D^n f$. Ferner sei g eine positive summierbare Funktion auf $[- \pi, + \pi]$ und $\epsilon > 0$ eine reelle Zahl, so daß für alle passenden Paare (h, k) mit $h+k < \epsilon$ und für alle $x \in [- \pi, + \pi]$ gilt : $|D^n(x, h, k; f)| < g(x)$.

Dann besitzt f fast überall in $[- \pi, + \pi]$ eine gewöhnliche n -te Ableitung, und für jedes x , für welches $f^{(n)}(x)$ existiert, gilt : $f^{(n)}(x) = D^n f(x)$.

Beweis. Für eine feste ganze Zahl m betrachte man

die Funktionen $e^{-imx} D^n(x, h, k; f)$ auf $[-\pi, +\pi]$. Dann gilt für alle $x \in [-\pi, +\pi]$ die Ungleichung $|e^{-imx} D^n(x, h, k; f)| < g(x)$. Ferner konvergieren die Funktionen $e^{-imx} D^n(x, h, k; f)$ auf $[-\pi, +\pi]$ gegen $e^{-imx} D^n f(x)$.

Für eine ganze Zahl m und eine summierbare Funktion h auf $[-\pi, +\pi]$ sei

$$\mathcal{G}_m(h) := h_F(m) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-imx} h(x) dx$$

der m -te komplexe Fourierkoeffizient der Funktion h .¹

Es sei $l := D^n f$. Dann gilt : ($h := h_1$, $k := h_2$)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_m[D^n(x, h_1, h_2; f) - l(x)] &= \\ &= \frac{n^n}{(h_1 + h_2)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \mathcal{G}_m[f(x - h_1 + \frac{k}{n}(h_1 + h_2)) - l_F(m)] \\ &= \frac{n^n}{(h_1 + h_2)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{im(-h_1 + \frac{k}{n}(h_1 + h_2))} f_F(m) - l_F(m). \end{aligned}$$

Durch Anwendung des Satzes von Lebesgue über die beschränkte Konvergenz (siehe z. B. [22], S.166; [11], S.193) auf die Funktionen $e^{-imx} D^n(x, h_1, h_2; f)$ ergibt sich für alle ganzzahligen m :

$$(5) \quad l_F(m) =$$

$$= \lim_{h_1 + h_2 \rightarrow 0} \frac{n^n}{(h_1 + h_2)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{im(-h_1 + \frac{k}{n}(h_1 + h_2))} f_F(m).$$

Es sei $G(h_1, h_2) := (h_1 + h_2)^n$,

¹ Zum Beweisverfahren für Satz 2 und Satz 3 wurde ich durch die Arbeit von BUTZER [4] angeregt.

$$F(h_1, h_2) := \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{im(-h_1 + \frac{k}{n}(h_1+h_2))}.$$

$$\text{Dann gilt : } \lim_{h_1+h_2 \rightarrow 0} F(h_1, h_2) = 0 = \lim_{h_1+h_2 \rightarrow 0} G(h_1, h_2).$$

Ferner sind $F(h_1, h_2)$ und $G(h_1, h_2)$ beliebig oft differenzierbar im gewöhnlichen Sinn an der Stelle $(0,0)$.

Sie lassen sich also in einer Umgebung von $(0,0)$ in eine Taylorreihe entwickeln, und man erhält :

$$F(h_1, h_2) G(h_1, h_2)^{-1} = \sum_{j=0} \frac{1}{j!} d^j F(0,0) \left(\sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{j!} d^j G(0,0) \right)^{-1},$$

wobei $d^j F(0,0)$ bzw. $d^j G(0,0)$ den gewöhnlichen totalen Zuwachs der Ordnung j von F bzw. G an der Stelle $(0,0)$ bezeichnet.

Entwickelt man $G(h_1, h_2)$ nach dem binomischen Lehrsatz, so ergibt sich :

$$d^j G(0,0) = 0 \quad \text{für } j \neq n,$$

$$d^n G(0,0) = n! (h_1+h_2)^n.$$

Schwieriger festzustellen ist der Wert von $d^j F(0,0)$.

Zunächst gilt :

$$\text{Lemma 6.} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^r = (-1)^n n! \delta_{rn} \quad (r \leq n),$$

wobei δ_{rn} das Kroneckersymbol bedeutet.

Der Beweis dieses Hilfssatzes läßt sich sehr einfach durch vollständige Induktion nach n erbringen.

$$\text{Für } j \leq n \text{ gilt : } d^j e^{im(h_1(\frac{k}{n}-1) + \frac{k}{n} h_2)}(0,0) =$$

$$= \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \left(i m \left(\frac{k}{n} - 1 \right) h_1 \right)^s \left(i m \frac{k}{n} h_2 \right)^{j-s}$$

$$= \left(\frac{i m}{n} \right)^j \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} \left((k-n) h_1 \right)^s (k h_2)^{j-s}$$

$$= \left(\frac{i m}{n} \right)^j \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} (k h_2)^{j-s} h_1^s \sum_{r=0}^s (-1)^{r \binom{s}{r}} k^{s-r} n^r.$$

Daraus folgt : $d^j F(0,0) =$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{i m}{n} \right)^j \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\sum_{s=0}^j \binom{j}{s} k^{j-s} h_2^{j-s} h_1^s \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{r=0}^s (-1)^{r \binom{s}{r}} k^{s-r} n^r \right) \right) \\ &= \left(\frac{i m}{n} \right)^j \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} h_1^s h_2^{j-s} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{j-s} \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{r=0}^s (-1)^{r \binom{s}{r}} k^{s-r} n^r \right) \right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{i m}{n} \right)^j \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} h_1^s h_2^{j-s} \left(\sum_{r=0}^s (-1)^{r \binom{s}{r}} n^r \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} k^{j-r} \right) \right). \end{aligned}$$

Aus Lemma 6 folgt nun :

$d^j F(0,0) = 0$ für $j < n$, weil in diesem Fall die Summe über k verschwindet;

$$\begin{aligned} d^n F(0,0) &= \left(\frac{-im}{n}\right)^n (-1)^n n! \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} h_1^s h_2^{n-s} = \\ &= \left(\frac{im}{n}\right)^n n! \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} h_1^s h_2^{n-s} = n! \left(\frac{im}{n}\right)^n (h_1+h_2)^n. \end{aligned}$$

In einer Umgebung von $(0,0)$ ist also

$$\frac{F(h_1, h_2)}{G(h_1, h_2)} = \frac{\left(\frac{im}{n}\right)^n (h_1+h_2)^n + H(h_1, h_2)}{(h_1+h_2)^n},$$

wobei $H(h_1, h_2)$ die Gestalt hat

$$H(h_1, h_2) = \sum_{i+k > n} a_{ik} h_1^i h_2^k.$$

$$\text{Daraus erhält man : } \lim_{h_1+h_2 \rightarrow 0} \frac{n^n F(h_1, h_2)}{G(h_1, h_2)} = (im)^n.$$

Folglich gilt :

$$(6) \quad l_F(m) = (im)^n f_F(m).$$

Damit erfüllen f und l die Voraussetzungen des folgenden Lemmas von BUTZER und ZYGMUND ([4], Lemma 1.2, S.278)

Lemma 7. Es seien g und h im Intervall $[-\pi, +\pi]$ summierbare Funktionen; g sei periodisch mit der Periode 2π . Für alle ganzzahligen m gelte :

$$(im)^n \mathcal{F}_m(g) = \mathcal{F}_m(h). \text{ Dann gilt für fast alle } x \text{ aus } [-\pi, +\pi] :$$

$$g(x) = g_F(0) + \int_{-\pi}^x dt_1 \int_{-\pi}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\pi}^{t_{n-1}} dt_n h(t_n) ;$$

d. h.: für alle $x \in [-\pi, +\pi]$ existiert $g^{(n-1)}(x)$ und

ist absolutstetig, und $g^{(n)}(x)$ existiert für fast alle $x \in [-\pi, +\pi]$, und es gilt $g^{(n)} \in L([-\pi, +\pi])$.

Folgerung. Unter den Voraussetzungen von Satz 2 ist die Funktion f für alle $x \in [-\pi, +\pi]$ im gewöhnlichen Sinn $n-1$ -mal stetig differenzierbar und für fast alle $x \in [-\pi, +\pi]$ gilt

$$f(x) = f_F(0) + \int_{-\pi}^x dt_1 \int_{-\pi}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\pi}^{t_{n-1}} D^n f(t_n) dt_n.$$

Bemerkung. Satz 2 gilt auch, wenn man bezüglich $D^n f$ nur voraussetzt, daß $D^n f(x)$ für fast alle x im Intervall $[-\pi, +\pi]$ existiert. Nach einem Satz von Lebesgue (s.z.B. [22], S.104) konvergieren dann die Funktionen $D^n(\cdot, h_1, h_2; f)$ dem Maße nach gegen $D^n f$ und man kann wieder den Satz über die beschränkte Konvergenz anwenden.

Für stetige, nicht notwendig periodische Funktionen, welche auf der ganzen reellen Geraden definiert sind, gilt der

Satz 3. Es sei f eine auf der ganzen reellen Geraden definierte stetige Funktion, deren n -te Intervallableitung $D^n f$ fast überall existiert. Es gelte

$$(7) \lim_{h_1+h_2 \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |D^n(x, h_1, h_2; f) - D^n f(x)| dx = 0.$$

Dann existiert fast überall die n -te gewöhnliche Ableitung und es gilt $f^{(n)}(x) = D^n f(x)$ für alle Punkte x , in welchen $f^{(n)}(x)$ existiert.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung ist f Element von $L[-\infty, +\infty[)$. Es sei

$$\mathcal{F}_F(f) = \hat{f}, \text{ wobei } \hat{f}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivx} f(x) dx, \quad v \in \mathbb{R},$$

die Fouriertransformierte der Funktion f . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_F(D^n(x, h_1, h_2; f) - D^n f(x)) \\ &= \frac{n \hat{f}(v)}{(h_1 + h_2)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{iv(h_1 - \frac{k}{n}(h_1 + h_2))} - D^{\hat{n}} \hat{f}(v). \end{aligned}$$

Auf Grund von (7) gilt

$$\lim_{h_1 + h_2 \rightarrow 0} \frac{n \hat{f}(v)}{(h_1 + h_2)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} e^{iv(h_1 - \frac{k}{n}(h_1 + h_2))} = D^{\hat{n}} \hat{f}(v).$$

Daraus folgt wie beim Beweis von Satz 2

$$(iv)^{n \hat{f}}(v) = D^{\hat{n}} \hat{f}(v).$$

Die Funktionen f und $D^n f$ erfüllen damit die Voraussetzungen des folgenden Hilfssatzes (vgl. [1], S.28, Th.16):

Lemma 8. Es seien g und h Funktionen aus dem linearen Raum $L[-\infty, +\infty[)$ mit den Fouriertransformierten $\hat{g}(v)$ und $\hat{h}(v)$. Es gelte $(iv)^{n \hat{g}}(v) = \hat{h}(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}$. Dann besitzt g fast überall auf $\mathbb{R}$ eine gewöhnliche Ableitung n -ter Ordnung, welche summierbar

ist, und es gilt fast überall $g^{(n)}(x) = h(x)$. -

Aus diesem Lemma folgt unmittelbar die Behauptung.

Folgerung. Unter den Voraussetzungen von Satz 3 ist die Funktion f für alle x im gewöhnlichen Sinn $n-1$ -mal absolutstetig differenzierbar. Für fast alle x gilt die Beziehung

$$f(x) = (-1)^n \int_x^{+\infty} dt_1 \int_{t_1}^{+\infty} dt_2 \dots \int_{t_{n-1}}^{+\infty} D^n f(t_n) dt_n.$$

Ist speziell $D^n f(x) = 0$ für alle x , so ist $f = 0$.

Beweis. Der Beweis ergibt sich sofort durch iterierte Anwendung zweier fundamentaler Sätze aus der Theorie der Fouriertransformationen ([1], S. 11, Theorem 5 und S. 26, Theorem 15).

Durch zwei Beispiele soll nun die Intervallableitung einerseits zur gewöhnlichen, andererseits zur symmetrischen Ableitung hin abgegrenzt werden.

1) Man betrachte die durch folgende Vorschrift definierte Funktion (vgl. [8], S. 277):¹

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^5} \sin \frac{1}{x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -\sqrt{-x^5} \sin \frac{1}{x} & (x < 0) \end{cases};$$

f ist eine stetige symmetrische überall differenzierbare Funktion. Die Ableitung f' ist in jedem abge-

¹ Auf dieses Beispiel wurde ich auch durch Herrn Peter Volkmann hingewiesen.

schlossenen Intervall gleichmäßig stetig, denn es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} \sqrt{x^3} \sin \frac{1}{x} - \sqrt{x} \cos \frac{1}{x} & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -\frac{5}{2} \sqrt{-x^3} \sin \frac{1}{x} + \sqrt{-x} \cos \frac{1}{x} & (x < 0) \end{cases}.$$

Die zweite gewöhnliche Ableitung existiert für alle x , außer für $x = 0$. Jedoch besitzt f im Punkt $x = 0$ eine zweite Intervallableitung. Es ist nämlich

$$D^2f(0) = \lim_{h_1+h_2 \rightarrow 0} \frac{4}{(h_1+h_2)^2} \left(\sqrt{h_1^5} \sin \frac{1}{h_1} + \sqrt{h_2^5} \sin \frac{1}{h_2} - 2\sqrt{\left|\frac{h_1-h_2}{2}\right|^5} \cdot \sin \frac{2}{|h_1-h_2|} \right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung (bis auf das Zeichen $\lim$) ist die Summe von drei Nullfolgen und damit wieder eine Nullfolge. Also existiert $D^2f(0)$, und es gilt: $D^2f(0) = 0$. Hieraus folgt auch sofort, daß für die Intervallableitung die Beziehung $D^{m+n}f(x) = D^m(D^n f)(x)$ nicht allgemein gilt.

2) Die Existenz einer n -ten Stammfunktion g zu einer gegebenen Funktion f in einem Intervall $[a, b]$ reicht im allgemeinen nicht aus, um in jedem Punkt dieses Intervalls die Existenz der n -ten Intervallableitung von g zu sichern. Es sei (vgl. [28], S. 62)

$$f(x) := \begin{cases} -2 & (-1 \leq x \leq 0) \\ +2 & (0 < x \leq +1) \end{cases}.$$

Die Funktion f ist im Intervall $[-1, +1]$ im Riemannschen Sinn integrierbar. Eine zweite Stammfunktion ist

etwa

$$g(x) := \begin{cases} -x^2 & (-1 \leq x \leq 0) \\ +x^2 & (0 < x \leq 1). \end{cases}$$

Die Funktionen g und g' sind im ganzen Intervall stetig. Für $x \neq 0$ existiert die zweite gewöhnliche Ableitung von g . Für $x = 0$ existiert aber auch die zweite Intervallableitung nicht. Denn es ist

$$D^2(0, h_1, h_2; g) = 4(h_1 + h_2)^{-2}(-h_1^2 + h_2^2 - \frac{1}{2}g(h_2 - h_1)).$$

Man nehme nun zwei Folgen von Intervallen bei denen

h_1 und h_2 proportional sind; für die erste Folge sei

$h_1 = 2h_2$, für die zweite gelte $h_2 = 3h_1$. Dann gilt

$$D^2(0, 2h_2, h_2; g) = \frac{4}{9} h_2^{-2} - \frac{5}{2} h_2^{-2} = -\frac{10}{9}$$

und

$$D^2(0, h_1, 3h_1; g) = \frac{1}{4} h_1^{-2} - 6 h_1^{-2} = \frac{3}{2}.$$

$D^2g(0)$ existiert also nicht. Jedoch besitzt g im

Punkt $x = 0$ eine zweite symmetrische Ableitung, denn

es ist $D^2(0, h_1, h_1; g) = S^2(0, h_1; g) = h_1^{-2}(h_1^2 - h_1^2) = 0$.

g ist also ein einfaches Beispiel einer Funktion, welche

überall eine zweite symmetrische Ableitung, aber nicht

überall eine zweite Intervallableitung besitzt.

1.2. Eine äquivalente Definition.

Bei der Definition der n -ten Intervallableitung $D^n f(x_0)$ in einem Punkt x_0 sind beim Grenzübergang alle abgeschlossenen Intervalle zur Konkurrenz zugelassen, welche ganz im Definitionsbereich der Funktion f liegen und den Punkt x_0 enthalten. Setzt man nun $h+k =: nt$, so erhält $D^n(x_0, h, k; f)$ die Gestalt

$$\begin{aligned} D^n(x_0, h, k; f) &= \frac{n^n}{(nt)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x_0 - h + \frac{j}{n}nt) \\ &= \frac{n^n}{(nt)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x_0 - h + \frac{n}{2}t - \frac{n}{2}t + jt) . \end{aligned}$$

Nun gilt wegen $0 \leq h \leq nt$ die Ungleichung $-\frac{n}{2}t \leq \frac{n}{2}t - h \leq \frac{n}{2}t$. Setzt man $\frac{n}{2}t - h =: pt$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} D^n(x_0, h, k; f) &= t^{-n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x_0 + pt - \frac{n}{2}t + jt) \\ &= S^n(x_0 + pt, t; f) , \end{aligned}$$

und man erhält den folgenden

Satz 1. Es sei f eine auf dem offenen Intervall I definierte reellwertige stetige Funktion und x_0 ein Punkt aus I . Dann gilt: f besitzt im Punkt x_0 genau dann eine n -te Intervallableitung, wenn für alle reellen p mit $-\frac{n}{2} \leq p \leq +\frac{n}{2}$ der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} S^n(x_0 + pt, t; f) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} t^{-n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x_0 + pt - \frac{n}{2}t + jt)$$

existiert und den gleichen Wert hat.

Satz 1 liefert nun sehr leicht eine Verbindung zur DENJOYSchen Theorie des verallgemeinerten Differentialquotienten (vgl.[8], S.305).

Definition 1. Es sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte stetige Funktion; $a_0, \dots, a_n$ seien paarweise verschiedene reelle Zahlen, und für alle $u \in \mathbb{R}$ sei $q(u) := (u-a_0) \cdot \dots \cdot (u-a_n)$. Für $x \in [a, b]$ gelte

$$R_n(f, x, h; a_0, \dots, a_n) := h^{-n} n! \sum_{j=0}^n q'(a_j)^{-1} f(x + a_j h).$$

Existiert der Grenzwert

$$g_n(x) := \lim_{h \rightarrow 0} R_n(f, x, h; a_0, \dots, a_n),$$

so heißt $g_n(x)$ der verallgemeinerte n -te Differentialquotient von f in x .

Die Intervallableitung erhält man folgendermaßen als Spezialfall des verallgemeinerten Differentialquotienten:

$$\text{Es sei } p \text{ eine reelle Zahl mit } -\frac{n}{2} \leq p \leq +\frac{n}{2},$$

$$a_k := p - \frac{n}{2} + k \quad \text{für } k = 0, \dots, n; \quad q(u) = (u-a_0) \dots (u-a_n).$$

$$\text{Dann gilt : } q'(a_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (a_j - a_k) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (j-k) =$$

$$= (-1)^{n-j} j! (n-j)! . \text{ Daraus folgt :}$$

$$R_n(f, x, h; a_0, \dots, a_n) = h^{-n} n! \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \frac{f(x+a_j h)}{j!(n-j)!}$$

$$= h^{-n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+ph - \frac{n}{2}h + jh)$$

$$= S^n(x+ph, h; f) .$$

Aus der Bedingung $-\frac{n}{2} \leq p \leq +\frac{n}{2}$ folgt, daß die Zahlen a_k sowohl positiv als auch negativ werden . Dies ist sehr wichtig im Hinblick auf ein Ergebnis von DENJOY ([8], S.305). Gilt nämlich $a_k \geq 0$ für $k = 0, \dots, n$ oder $a_k \leq 0$ für $k = 0, \dots, n$, so ist es nicht möglich, die Funktion f bis auf ein Polynom vom Grad $r \leq n-1$ eindeutig aus ihrem verallgemeinerten n -ten Differentialquotienten zu bestimmen.

Es sei (vgl. [8], S.305f.) E eine abgeschlossene Teilmenge des Intervalls $[a, b]$, die aus einem oder mehreren abgeschlossenen Teilintervallen (endlich vielen) bestehen soll. Es sei

$$d(x, E) := \begin{cases} 0 & (x \in E) \\ -\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{\beta-\alpha} & (x \in]\alpha, \beta[, \text{ wobei }]\alpha, \beta[\subseteq [a, b] \\ & \text{ein zu } E \text{ benachbartes Inter-} \\ & \text{vall ist}). \end{cases}$$

Man setze nun $u(x) := (d(x,E))^{n+s}$ mit $s > 0$.

$I :=]c,d[$ sei ein zu E benachbartes offenes Teilintervall von $[a,b]$ und $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sei eine Folge von Punkten aus I mit der Eigenschaft $\lim_{k \rightarrow -\infty} a_k = c$ und $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = d$.

In den Punkten a_k seien irgendwelche Funktionswerte $f(a_k)$ gegeben mit der Eigenschaft $0 < |f(a_k)| < u(a_k)$ für alle k . Im Intervall $[a_k, a_{k+1}]$ sei die Funktion $f(x) = P(x, I, k)$ ein Polynom vom Grad $r = n-1$, welches in den Randpunkten a_k und a_{k+1} die gegebenen Werte annimmt und im Innern der Ungleichung genügt: $|P(x, I, k)| < u(x)$. Man verfähre so auf jedem zur Menge E benachbarten Intervall. Setzt man $f(x) = u(x)$ für alle $x \in E$, so erhält man eine auf dem ganzen Intervall $[a,b]$ definierte stetige Funktion. In jedem Punkt von E besitzt f gewöhnliche Ableitungen bis zur Ordnung n , die alle verschwinden. Für jedes a_k besitzt f von jeder Seite eine n -te Ableitung, welche verschwindet, weil der n -te einseitige Differentialquotient von rechts und von links verschwindet. Die vorangehenden Differentialquotienten sind aber im allgemeinen von links und von rechts im Wert verschieden. Auf jedem Intervall, welches keinen der Punkte a_k enthält, verschwindet die n -te gewöhnliche Ableitung von f identisch. Somit gilt für alle $x \in I$: $f^{(n)}(x) = 0$. Insbesondere existiert für jeden Punkt aus I der n -te ver-

allgemeinerte Differentialquotient und hat den Wert 0. Aber die Funktion f ist kein eindeutig bestimmtes Polynom auf dem Intervall $I = [c, d]$. Denn ein solches müßte einerseits wie auf dem Intervall $[a_k, a_{k+1}]$ vom Grad $r \leq n-1$ sein; andererseits hätte es in den Punkten c und d n -fache Nullstellen, würde also identisch verschwinden. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $f(a_k) \neq 0$.

1.3. Beziehungen der Intervallableitung
zur Taylor-, Peano- und zur Distributionenableitung.

Die Taylor- und die Peanoableitung sind weitere Beispiele abgeschwächter Ableitungen, welche in dem breiten Raum zwischen der gewöhnlichen und der symmetrischen Differentiation existieren.

Definition 1. Es sei f eine in einer Umgebung des Punktes x_0 definierte $n-1$ -mal im gewöhnlichen Sinn differenzierbare Funktion. Wenn der Grenzwert

$$f^{(n)}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n!}{h^n} \left[f(x_0 + h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right]$$

existiert, so heißt $f^{(n)}(x_0)$ die n -te Taylorableitung von f an der Stelle x_0 .

Definition 2. Es sei f eine in einer Umgebung des Punktes x_0 definierte stetige Funktion. f besitzt im Punkt x_0 eine n -te Peanoableitung $f^{\text{InI}}(x_0)$, wenn es Zahlen $f^{\text{I1I}}(x_0), f^{\text{I2I}}(x_0), \dots, f^{\text{InI}}(x_0)$ gibt, derart daß die Entwicklung gilt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{k!} f^{\text{IkI}}(x_0) + o(h^n).$$

Man sieht sofort, daß aus der Existenz der n -ten

Peanoableitung die Existenz aller vorangehenden Peanoableitungen folgt. Die erste Peano- und die erste Taylorableitung sind der ersten gewöhnlichen Ableitung äquivalent; die zweite Peanoableitung ist äquivalent zur Taylorableitung zweiter Ordnung, und für $n \geq 3$ folgt aus der Existenz von $f^{(n)}(x_0)$ die Existenz von $f^{\text{InI}}(x_0)$. Existiert die n -te Peanoableitung einer Funktion in einem Intervall $[a, b]$ ($a < b$), so besitzt sie nach Ergebnissen von OLIVER [24] die Eigenschaft von Darboux und erfüllt eine verallgemeinerte Mittelwerteigenschaft. Ist f^{InI} im Intervall $[a, b]$ beschränkt, so existiert in $[a, b]$ die n -te gewöhnliche Ableitung und es gilt $f^{(n)}(x) = f^{\text{InI}}(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Diese Ergebnisse gelten erst recht für die Taylorableitung. Daher wird im folgenden vor allem der Zusammenhang zwischen der Peanoableitung und der Intervallableitung untersucht.

Satz 1. Es sei f eine auf dem offenen Intervall $]a, b[$ definierte reellwertige stetige Funktion. Für alle $x \in]a, b[$ existiere $D^n f(x)$ und sei beschränkt. Dann existiert für fast alle $x \in]a, b[$ die n -te Peanoableitung $f^{\text{InI}}(x)$ und es gilt für $k = 1, 2, \dots, n$:

$$f^{\text{IkI}}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)_a f^{\text{Ik-1I}}(x).$$

Dabei bedeutet der Index a , daß es sich um die approximative Ableitung handelt.

Beweis. Aus 1. Lemma 2 folgt, daß für alle x aus $]a, b[$ die n -te symmetrische Ableitung existiert und endlich ist. Die Funktion f erfüllt daher die Voraussetzungen des folgenden Satzes von MARCINKIEWICZ und ZYGMUND (vgl. [17], S.2, Theorem 1) :

Lemma 1. Es sei f eine auf dem offenen Intervall $]a, b[$ ($a < b$) definierte reellwertige stetige Funktion. Für alle $x \in]a, b[$ existiere $S^n f(x)$, und es sei $|S^n f(x)| < \infty$. Dann existiert fast überall in $]a, b[$ die n -te Peanoableitung $f^{InI}(x)$, und es gilt für fast alle $x \in]a, b[$ und für $k = 1, \dots, n$:

$$f^{IkI}(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)_a f^{Ik-1I}(x) .$$

Aus diesem Lemma ergibt sich sofort Satz 1.

Lemma 2. Es sei f eine in einer Umgebung des Punktes x_0 definierte reellwertige stetige Funktion. Im Punkt x_0 besitze f eine n -te Peanoableitung $f^{InI}(x_0)$. Dann existiert für alle $p \in \mathbb{R}$ der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} S^n(x_0 + ph, h; f)$, und es gilt :

$$\lim_{h \rightarrow 0} S^n(x_0 + ph, h; f) = f^{InI}(x_0) .$$

Beweis. Es sei p eine beliebige, aber feste reelle Zahl. Der Beweis soll durch vollständige Induktion nach n erbracht werden.

Für $n = 1$ folgt aus Definition 2 die Behauptung.

Angenommen, die Behauptung sei richtig für ein $n = k-1$,
und es existiere $f^{IkI}(x_0)$. Setzt man

$$\Delta^k(x_0 + ph, h; f) := h^k S^k(x_0 + ph, h; f), \text{ so gilt}$$

$$(1) \Delta^k(x_0 + ph, h; f) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x_0 + ph - \frac{k}{2}h + jh).$$

Da $f^{IkI}(x_0)$ existiert, gilt für $f(x_0 + h)$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{r=1}^k \frac{h^r}{r!} f^{IrI}(x_0) + o(h^k).$$

Setzt man dies in Gleichung (1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta^k(x_0 + ph, h; f) &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x_0) + \\ &+ \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{r=1}^k \frac{h^r}{r!} (p - \frac{k}{2} + j)^r f^{IrI}(x_0) + o(h^k) \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \left(\sum_{r=1}^k \frac{h^r}{r!} f^{IrI}(x_0) \sum_{m=0}^r \binom{r}{m} j^m (p - \frac{k}{2})^{r-m} \right) \\ &\quad + o(h^k) \\ &= \sum_{r=1}^k \frac{h^r}{r!} f^{IrI}(x_0) \sum_{m=0}^r \binom{r}{m} (p - \frac{k}{2})^{r-m} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^m \\ &\quad + o(h^k), \end{aligned}$$

und dies ergibt nach 1. Lemma 6:

$$\Delta^k(x_0 + ph, h; f) = \frac{h^k}{k!} f^{IkI}(x_0) k! + o(h^k).$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

Kombination von Lemma 2 und 1. Satz 1 ergibt den

Satz 2. Es sei f eine in einer Umgebung des Punktes x_0 definierte reellwertige stetige Funktion. f besitze im Punkt x_0 eine n -te Peanoableitung. Dann existiert im Punkt x_0 die n -te Intervallableitung $D^n f(x_0)$, und es gilt: $D^n f(x_0) = f^{InI}(x_0)$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht notwendig.

In dem linearen Raum $C([a,b])$ aller auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ definierten reellwertigen stetigen Funktionen bezeichne man nacheinander mit $G^{(n)}([a,b])$, $T^{(n)}([a,b])$, $P^{InI}([a,b])$, $D^n([a,b])$ und $S^n([a,b])$ die Teilräume der Funktionen aus $C([a,b])$, welche für alle $x \in [a,b]$ eine n -te gewöhnliche bzw. Taylor- bzw. Peano- bzw. Intervall- bzw. symmetrische Ableitung besitzen. Dann gilt:

$$G^{(n)}([a,b]) \subset T^{(n)}([a,b]) \subseteq P^{InI}([a,b]) \subseteq D^n([a,b]) \subset S^n([a,b]) \subset C([a,b]) .$$

Es sei $(\mathcal{D})$ der lineare Raum aller komplexwertigen unendlich oft differenzierbaren Funktionen, deren Träger eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Ist f eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{R}$, so wird durch f auf $(\mathcal{D})$ eine Linearform $T(f)$ erzeugt, deren Einschränkung auf jeden Teilraum $(\mathcal{D}_K)$ - K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ - stetig ist, indem man festsetzt:

$$\langle T(f), \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in (\mathcal{D}) .$$

Die Funktion f definiert also eine Distribution $T(f)$. Nun ist jede Distribution zwar beliebig oft differenzierbar, es kommt jedoch vor, daß die n -te gewöhnliche Ableitung von f existiert, ohne mit der n -ten Distributionen-ableitung äquivalent zu sein. Daher soll eine hinreichende Bedingung dafür angegeben werden, daß die n -te Intervallableitung von f zur n -ten Distributionenableitung äquivalent ist. - In Analogie zu 1. Satz 2 gilt der

Satz 3. Es sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte reellwertige stetige Funktion, deren n -te Intervallableitung fast überall auf $[a, b]$ existiere. Es sei $g \in L([a, b])$ eine positive summierbare Funktion und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl mit der Eigenschaft, daß für alle geeigneten Paare (h_1, h_2) mit $h_1 + h_2 < \varepsilon$ die Ungleichung gilt: $|D^n(x, h_1, h_2; f)| < g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann existiert die n -te Distributionen-ableitung von f auf dem Intervall $[a, b]$ und stimmt fast überall mit $D^n f$ überein.

Beweis. Es sei ε_k fest mit $0 < \varepsilon_k < \varepsilon$. Weiter setze man $J_k := [a + \varepsilon_k, b - \varepsilon_k]$. $\mathcal{D}_k := \mathcal{D}(J_k)$ sei der lineare Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen φ , deren Träger in J_k enthalten ist. Für ein beliebiges, aber festes $\varphi \in \mathcal{D}_k$ und für alle Paare

(h_1, h_2) mit $h_1 + h_2 < \varepsilon_k$ gilt dann die Gleichung

$$\int_a^b D^n(x, h_1, h_2; f) \varphi(x) dx = (-1)^n \int_a^b f(x) D^n(x, h_2, h_1; \varphi) dx.$$

Da $\varphi \in \mathcal{D}_K$ beliebig oft differenzierbar ist und f auf $[a, b]$ stetig ist, gibt es eine positive summierbare Funktion M , so daß für alle Paare (h_1, h_2) mit $h_1 + h_2 < \varepsilon_k$ gilt: $|f(x) D^n(x, h_1, h_2; \varphi)| < M(x)$ für alle $x \in J_k$. Die Funktionen $f(x) D^n(x, h_1, h_2; \varphi)$ konvergieren gegen $f(x) \varphi^{(n)}(x)$ dem Maße nach (für $h_1 + h_2 \rightarrow 0$). Anwendung des Satzes von Lebesgue über die beschränkte Konvergenz ergibt daher, daß der Grenzwert

$$\lim_{h_1 + h_2 \rightarrow 0} \int_a^b (-1)^n f(x) D^n(x, h_2, h_1; \varphi) dx \text{ existiert und}$$

die Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{h_1 + h_2 \rightarrow 0} \int_a^b (-1)^n f(x) D^n(x, h_2, h_1; \varphi) dx &= \\ &= (-1)^n \int_a^b f(x) \varphi^{(n)}(x) dx. \end{aligned}$$

Andrerseits ist wegen des Satzes von Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{h_1 + h_2 \rightarrow 0} \int_a^b (-1)^n f(x) D^n(x, h_2, h_1; \varphi) dx &= \\ &= \lim_{h_1 + h_2 \rightarrow 0} \int_a^b D^n(x, h_1, h_2; f) \varphi(x) dx = \int_a^b D^n f(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Die Integrale sind für alle $\varphi \in \mathcal{D}_k$ beschränkt; daher erzeugt $D^n f$ eine stetige Linearform auf $\mathcal{D}_k$, und es gilt $\langle D^n f, \varphi \rangle = (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}_k$. $D^n f$ definiert daher auf $\mathcal{D}_k$ eine Distribution $T^{(n)}(f)$, welche ihrerseits die n-te Ableitung einer Distribution ist. Durch die Folge $\mathcal{E}_0 \supset \mathcal{E}_1 \supset \dots \supset \mathcal{E}_k \supset \dots$ mit $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E}$ ist eine aufsteigende Folge von Funktionenräumen $\mathcal{D}_k$ gegeben, die sämtlich offene Teilräume von $\mathcal{D}_0$ sind ($J_0 = [a, b]$). Wendet man das "principe du recollement des morceaux" an (vgl. [31], S. 27), so ergibt sich, daß die durch $D^n f$ auf $\mathcal{D}_0$ definierte Distribution die n-te Ableitung einer Distribution auf $\mathcal{D}_0$ ist. Diese Distribution $T(g)$ unterscheidet sich von $T(f)$ nur um ein Polynom vom Grade $r \leq n-1$ (vgl. [31], S. 53, Corollaire). Folglich besitzt f eine n-te Distributionenableitung auf $[a, b]$, welche fast überall mit $D^n f$ übereinstimmt.

2. UNTERSUCHUNGEN FÜR FUNKTIONEN

VON ZWEI VERÄNDERLICHEN.

2.1. Partielle Ableitungen und ihre Vertauschbarkeit.

Der folgende Satz über die Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge bei gewöhnlichen partiellen Ableitungen von Funktionen von zwei Veränderlichen geht auf SCHWARZ ([32], S. 384) zurück. Die zitierte Fassung findet man auch bei LANDAU ([15], S. 213) und FICHTENHOLZ ([10], Bd. I, S. 382).

Satz 1. Es sei f eine in einer Umgebung U des Punktes (x_0, y_0) definierte reellwertige stetige Funktion. In U existiere die gemischte partielle Ableitung zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =: f_{xy}$, und diese sei in (x_0, y_0) stetig. In einer x -Umgebung von (x_0, y_0) existiere die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) =: f_y(x, y_0)$. Dann existiert $f_{yx}(x_0, y_0)$ und es gilt :

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) .$$

Der Beweis ergibt sich durch Anwendung des Mittelwertsatzes und des Satzes über die Vertauschung von Grenzwerten auf den zu $f_{xy}(x_0, y_0)$ gehörenden Differenzenquotienten (vgl. [10], Bd. I, S. 383).

Satz 2. Es sei f eine in einer Umgebung U des Punktes (x_0, y_0) definierte reellwertige stetige Funktion. In U besitze f alle gemischten partiellen Ableitungen der Ordnung $l_x + k_y$. In U existiere weiter eine gemischte partielle Ableitung der Ordnung $(l+1)_x + k_y$ und diese sei im Punkt (x_0, y_0) stetig. Dann existieren in (x_0, y_0) alle gemischten partiellen Ableitungen der Ordnung $(l+1)_x + k_y$ und der Wert dieser Ableitungen an der Stelle (x_0, y_0) ist unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen.

Beweis. Zunächst gilt der Satz für $l = 1$ und $k = 0$. Er gilt auch für $l = 0$, $k = 1$, da sich in Satz 1 die Rollen von x und y ohne Schwierigkeit vertauschen lassen. Angenommen, der Satz sei richtig für alle Werte von m und n mit $m \leq l$ und $n \leq k$. Dann ist speziell der Wert einer gemischten partiellen Ableitung, die durch insgesamt l -maliges Differenzieren nach x und insgesamt k -maliges Differenzieren nach y zustande kam, an der Stelle (x_0, y_0) unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen, und es gilt:

$$\frac{\partial^{l+k} f}{\partial x^l \partial y^k} (x_0, y_0) = \frac{\partial^{k+l} f}{\partial y^k \partial x^l} (x_0, y_0) .$$

O.B.d.A. kann man also annehmen, in einer Umgebung von (x_0, y_0) existiere die partielle Ableitung

$\frac{\partial^{l+k+1} f}{\partial x^l \partial y^k \partial x} (x, y)$ und sei im Punkt (x_0, y_0) stetig. Man

setze nun $g(x,y) := \frac{\partial^{1+k-1} f}{\partial x^1 \partial y^{k-1}}(x,y)$. Dann gilt :

$$\frac{\partial^{1+k+1} f}{\partial x^1 \partial y^k \partial x} (x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} (x,y) \quad \text{für alle } (x,y) \in U.$$

Die Behauptung ergibt sich dann durch einfache Anwendung von Satz 1.

Um zu untersuchen, wie weit solche Vertauschungssätze auch für andere Arten partieller Ableitungen gelten, bedarf es zunächst einiger Definitionen.

Definition 1. Es sei f eine in einer Umgebung U des Punktes (x_0, y_0) definierte reellwertige stetige Funktion.

a) In einer x -Umgebung des Punktes (x_0, y_0) sei f $n-1$ -mal partiell nach x im gewöhnlichen Sinn differenzierbar. Existiert der Grenzwert

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n!}{h^n} (f(x_0 + h, y_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0, y_0)),$$

so heißt $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0, y_0)$ die n -te partielle Taylorableitung von f nach x im Punkt (x_0, y_0) .

b) In einer y -Umgebung des Punktes (x_0, y_0) sei f im gewöhnlichen Sinn $m-1$ -mal partiell nach y differenzierbar. Existiert der Grenzwert

$$\frac{\partial^m f}{\partial y^m}(x_0, y_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m!}{t^m} (f(x_0, y_0 + t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x_0, y_0)),$$

so heißt $\frac{\partial^m f}{\partial y^m}(x_0, y_0)$ die m-te partielle Taylorableitung von f nach y im Punkt (x_0, y_0) .

c) Entsprechend wird die gemischte partielle Taylorableitung der Ordnung $n_x + m_y$ von f im Punkt (x_0, y_0) als m-te partielle Taylorableitung nach y der n-ten partiellen Taylorableitung nach x von f im Punkt (x_0, y_0) definiert.

Definition 2. Es sei f eine in einer Umgebung U des Punktes (x_0, y_0) definierte reellwertige stetige Funktion.

a) Die Funktion f besitzt im Punkt (x_0, y_0) eine

n-te partielle Peanoableitung $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0, y_0)$ nach x,

wenn es Zahlen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0, y_0)$ gibt,

derart daß für hinreichend kleine Beträge von h und für $(x_0 + h, y_0) \in U$ die Entwicklung gilt

$$f(x_0 + h, y_0) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x_0, y_0) + o(h^n)$$

b) Die Funktion f besitzt im Punkt (x_0, y_0) eine

m-te partielle Peanoableitung $\frac{\partial^m f}{\partial y^m}(x_0, y_0)$ nach y,

wenn es Zahlen $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \dots, \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(x_0, y_0)$ gibt,

derart daß für hinreichend kleine Beträge von t

und für $(x_0, y_0 + t) \in U$ die Entwicklung gilt

$$f(x_0, y_0 + t) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^m \frac{t^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x_0, y_0) + o(t^m).$$

c) Entsprechend wird die gemischte partielle Peano-ableitung der Ordnung $n_x + m_y$ von f im Punkt (x_0, y_0) als m -te partielle Peanoableitung nach y der n -ten partiellen Peanoableitung von f nach x im Punkt (x_0, y_0) definiert.

Aus diesen Definitionen folgt, daß die partiellen Taylor- bzw. Peanoableitungen erster Ordnung sowie die gemischten partiellen Taylor- bzw. Peanoableitungen zweiter Ordnung zu den entsprechenden gewöhnlichen partiellen Ableitungen äquivalent sind. Daraus ergibt sich, daß für die Vertauschbarkeit der gemischten partiellen Taylor- bzw. Peanoableitungen zweiter Ordnung ebenfalls Satz 1 gilt.

Gemischte und nicht gemischte partielle Taylorableitungen, deren Ordnung bzgl. einer Variablen nicht größer ist als zwei, sind zu den entsprechenden Peanoableitungen äquivalent. Für höhere Ordnung folgt stets aus der Existenz der Taylorableitung die Existenz der entsprechenden Peanoableitung. Die folgenden beiden Sätze gelten daher auch für die Taylorableitung.

Satz 3. Es sei f eine in der Umgebung U des Punktes (x_0, y_0) definierte reellwertige stetige

Funktion , welche in U die partiellen Peanoableitungen

$\frac{\partial^1 I f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 I f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 I f}{\partial x^2 \partial y}$ besitze . Im Punkt (x_0, y_0) seien

$\frac{\partial^2 I f}{\partial y \partial x}$ und $\frac{\partial^3 I f}{\partial x^2 \partial y}$ stetig . Dann existiert $\frac{\partial^3 I f}{\partial y \partial x^2}(x_0, y_0)$,

und es gilt : $\frac{\partial^3 I f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^3 I f}{\partial y \partial x^2}(x_0, y_0)$.

Beweis. Man erhält zunächst, daß in U sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung existieren ; in (x_0, y_0) existieren außerdem die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung; ihr Wert ist unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen. Der Beweis verläuft nun analog zu dem von Satz 1 , indem man sich des Mittelwertsatzes für die Peanoableitung ([24], S.450, Theorem 2) und des Satzes über die Vertauschung von Grenzwerten ([10], Bd. I, S.339) bedient .

Für gemischte partielle Peanoableitungen höherer Ordnung ergibt sich auf diese Weise

Satz 3'. Es sei f eine in der Umgebung U des Punktes (x_0, y_0) definierte reellwertige stetige Funktion . In U besitze f die partiellen Peanoableitungen $\frac{\partial^{Im+nI} f}{\partial x^m \partial y^n}$ und $\frac{\partial^{Ij+kI} f}{\partial x^j \partial y^k}$ für alle (j, k) mit $j \leq m$ und $k \leq n-1$. Sind diese Ableitungen in (x_0, y_0) stetig, so existiert auch die partielle Peanoableitung

$\frac{\partial^{In+mI} f}{\partial y^n \partial x^m}(x_0, y_0)$ und es gilt die Gleichung

$$\frac{\partial^{Im+nI} f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0, y_0) = \frac{\partial^{In+mI} f}{\partial y^n \partial x^m}(x_0, y_0).$$

Definition 3. Es sei f eine im Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ definierte reellwertige stetige Funktion, und es sei (x_0, y_0) ein Punkt in G .

a) Es gelte $\mathcal{J}_x^n(x_0, y_0; h_1, h_2; f) :=$

$$= \frac{n^n}{(h_1 + h_2)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x_0 - h_1 + \frac{j}{n}(h_1 + h_2), y_0).$$

Existiert der Grenzwert

$$\frac{\mathcal{J}_x^n f}{\mathcal{J}_x^n}(x_0, y_0) := \lim_{h_1+h_2 \rightarrow 0} \mathcal{J}_x^n(x_0, y_0; h_1, h_2; f),$$

so heißt $\frac{\mathcal{J}_x^n f}{\mathcal{J}_x^n}(x_0, y_0)$ die n -te partielle Intervallableitung von f nach x im Punkt (x_0, y_0) .

b) Es gelte $\mathcal{J}_y^m(x_0, y_0; k_1, k_2; f) :=$

$$= \frac{m^m}{(k_1 + k_2)^m} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x_0, y_0 - k_1 + \frac{j}{m}(k_1 + k_2)).$$

Existiert der Grenzwert

$$\frac{\mathcal{J}_y^m f}{\mathcal{J}_y^m}(x_0, y_0) := \lim_{k_1+k_2 \rightarrow 0} \mathcal{J}_y^m(x_0, y_0; k_1, k_2; f),$$

so heißt $\frac{\mathcal{J}_y^m f}{\mathcal{J}_y^m}(x_0, y_0)$ die m -te partielle Intervallableitung von f nach y im Punkt (x_0, y_0) .

leitung von f nach y im Punkt (x_0, y_0) .

c) Entsprechend wird die gemischte partielle Intervallableitung $\frac{\partial^{n+m} f}{\partial x^n \partial y^m}(x_0, y_0)$ als m -te partielle Intervallableitung nach y der n -ten partiellen Intervallableitung von f nach x im Punkt (x_0, y_0) definiert.

Wie im Fall einer Veränderlichen folgt aus der Existenz einer partiellen Peanoableitung im Punkt (x_0, y_0) die Existenz der entsprechenden partiellen Intervallableitung von f in (x_0, y_0) .

Satz 4. Es sei f eine in dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ definierte reellwertige stetige Funktion, und (x_0, y_0) sei ein Punkt aus G . Für alle Punkte $(x, y) \in G$ existiere die n -te partielle Intervallableitung von f nach x und sei beschränkt; desgleichen existiere die m -te partielle Intervallableitung von f nach y in allen Punkten $(x, y) \in G$ und sei beschränkt. Ferner existiere der (endliche) Grenzwert

$$H(x_0, y_0) := \lim_{\substack{h_1+h_2 \rightarrow 0 \\ k_1+k_2 \rightarrow 0}} \frac{n^n m^m D(x_0, y_0)}{(h_1+h_2)^n (k_1+k_2)^m}, \text{ wobei}$$

$$D(x_0, y_0) := \sum_{j=0}^n \sum_{r=0}^m (-1)^{m+n-j-r} \binom{n}{j} \binom{m}{r} f_{j,r}$$

$$\text{mit } f_{j,r} := f(x_0 - h_1 + \frac{j}{n}(h_1+h_2), y_0 - k_1 + \frac{r}{m}(k_1+k_2)).$$

Dann existieren im Punkt (x_0, y_0) die partiellen Inter-

vallableitungen $\frac{\mathfrak{J}^{n+m_f}}{\mathfrak{J}_x^n \mathfrak{J}_y^m}(x_0, y_0)$ und $\frac{\mathfrak{J}^{m+n_f}}{\mathfrak{J}_y^m \mathfrak{J}_x^n}(x_0, y_0)$,

und es gilt die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{J}^{n+m_f}}{\mathfrak{J}_x^n \mathfrak{J}_y^m}(x_0, y_0) = \frac{\mathfrak{J}^{m+n_f}}{\mathfrak{J}_y^m \mathfrak{J}_x^n}(x_0, y_0) = H(x_0, y_0) .$$

Beweis. Auf Grund der Voraussetzungen existieren die partiellen Grenzwerte

$$\lim_{h_1+h_2 \rightarrow 0} \frac{n^n m^m D(x_0, y_0)}{(h_1+h_2)^n (k_1+k_2)^m} \quad (k_1, k_2 \text{ fest}) , \text{ sowie}$$

$$\lim_{k_1+k_2 \rightarrow 0} \frac{n^n m^m D(x_0, y_0)}{(h_1+h_2)^n (k_1+k_2)^m} \quad (h_1, h_2 \text{ fest})$$

und sind beschränkt . Dann folgt die Behauptung aus dem bekannten Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwerten (vgl. etwa [10], Bd. I, S. 339) .

2.2. Polynomeigenschaften der partiellen Intervallableitungen .

Aus der Differential- und Integralrechnung kennt man für gewöhnliche partielle Ableitungen erster Ordnung einer reellwertigen stetigen Funktion von zwei Veränderlichen den folgenden

Satz 1. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\bar{G}$ seine abgeschlossene Hülle . Auf $\bar{G}$ sei eine reellwertige stetige Funktion f definiert , deren gewöhnliche partielle Ableitungen erster Ordnung f_x und f_y in G existieren und identisch verschwinden . Dann ist f in $\bar{G}$ eine Konstante .

Zum Beweis vgl. man etwa [10], Bd.I, S.326 .

Satz 1'. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\bar{G}$ seine abgeschlossene Hülle . Auf $\bar{G}$ sei eine reellwertige stetige Funktion definiert , deren gewöhnliche partielle Ableitungen n -ter Ordnung (gemischte und nicht gemischte) in G existieren und identisch verschwinden . Dann ist die Funktion ein Polynom in x und y höchstens vom Grad $\cdot n-1$.

Beweis. Da G zusammenhängend ist , kann man je zwei Punkte aus G durch einen Streckenzug verbinden , der ganz in G verläuft . Es seien also (x_0, y_0) und

.

(x_1, y_1) die Randpunkte einer ganz in G verlaufenden Strecke . Dann ergibt sich die Behauptung sofort durch Anwendung der Taylorschen Formel im Punkt (x_0, y_0) und aus der Tatsache, daß dieselbe nach dem n -ten Zuwachsglied ohne Rest abbricht .

Betrachtet man nun die partiellen Intervallableitungen n -ter Ordnung einer Funktion, wie diese im vorangehenden Abschnitt definiert wurden, so läßt sich als Analogon eines Satzes von DINGHAS ([9], S.11, Hilfssatz 1) das folgende Ergebnis beweisen :

Satz 2. Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $\bar{G}$ seine abgeschlossene Hülle . Auf $\bar{G}$ sei eine reellwertige stetige Funktion f definiert, deren sämtliche gemischten und nicht gemischten partiellen Intervallableitungen n -ter Ordnung in G existieren und identisch verschwinden . Dann ist f ein Polynom in x und y höchstens vom Grad $n-1$.

Beweis. Für einen Punkt $(x, y) \in G$ ist die partielle Intervallableitung n -ter Ordnung definiert durch

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^j \partial y^{n-j}}(x, y) = \lim_{t_1 + t_2 \rightarrow 0} \lim_{h_1 + h_2 \rightarrow 0} \frac{j^j (n-j)^{n-j} A_j}{(h_1 + h_2)^j (t_1 + t_2)^{n-j}}$$

$$\text{wobei } A_j := \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^{n-i-k} \binom{j}{i} \binom{n-j}{k} f_{ik}(j)$$

$$(j = 0, 1, \dots, n).$$

Dabei ist

$$f_{ok}(0) := f(x, y - t_1 + \frac{k}{n}(t_1 + t_2)) \quad (j=0),$$

$$f_{ik}(j) := f(x - h_1 + \frac{j}{n}(h_1 + h_2), y - t_1 + \frac{k}{n-j}(t_1 + t_2)) \quad (j \neq 0, n),$$

$$f_{io}(n) := f(x - h_1 + \frac{j}{n}(h_1 + h_2), y) \quad (j=n).$$

In G existieren sämtliche partiellen Intervallableitungen n -ter Ordnung und verschwinden identisch. Ferner existieren für $j = 0, 1, \dots, n$ die partiellen Intervall-

ableitungen $\frac{\mathfrak{J}_x^j f}{\mathfrak{J}_x^j}$ und $\frac{\mathfrak{J}_y^{n-j} f}{\mathfrak{J}_y^{n-j}}$ und sind für jedes x

bzw. y stetige Funktionen in y bzw. x . Daraus folgt, daß auch der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h_1 + h_2 \rightarrow 0 \\ t_1 + t_2 \rightarrow 0}} \frac{j^j (n-j)^{n-j} A_j}{(h_1 + h_2)^j (t_1 + t_2)^{n-j}} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

überall in G existiert und verschwindet.

Es sei zunächst $Q := [0, 1] \times [0, 1]$ Teilmenge von G .

Man zerlege die Strecken $\{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$ und

$\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$ äquidistant in je n Teilstrecken und definiere für $j = 0, 1, \dots, n$ das Gebilde Q^j durch

$$Q^j := \left[0, \frac{j}{n}\right] \times \left[0, \frac{n-j}{n}\right] \quad \text{und} \quad Q_{ik}^j \quad \text{durch}$$

$$Q_{ik}^j := \left[\frac{i}{2n}, \frac{i+j}{2n}\right] \times \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+n-j}{2n}\right] \quad (i = 0, 1, \dots, j; k = 0, 1,$$

$\dots, n-j)$. Dann gilt $Q_{ik}^j \subset Q^j$ und alle Q^j sind in dem von den Strecken Q^0 und Q^n aufgespannten Dreieck enthalten.

Für festes j zwischen 0 und n setze man

$$F(Q^j) := \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^{i+k} \binom{j}{i} \binom{n-j}{k} f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) ; \text{ für}$$

$$Q^j = [a_j, b_j] \times [c_j, d_j] \text{ sei } |Q^j|_n := (b_j - a_j)^j (d_j - c_j)^{n-j},$$

$$\text{und es gelte } D_j^n(Q^j, f) := |Q^j|_n^{-1} \cdot F(Q^j) .$$

$$I) \text{ Es gilt : } D_j^n(Q^j, f) = \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} a_{ik}^j D_j^n(Q_{ik}^j, f)$$

$$\text{mit } \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} a_{ik}^j = 1 . \text{ Dabei sind die Ausdrücke}$$

$$D_j^n(Q_{ik}^j, f) \text{ mit } Q_{ik}^j \text{ analog zu } D_j^n(Q^j, f) \text{ gebildet .}$$

$$\text{Beweis. Es ist } \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{j}{i} \binom{n-j}{k} F(Q_{ik}^j) =$$

$$= \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} \sum_{r=0}^j \sum_{s=0}^{n-j} \binom{j}{i} \binom{n-j}{k} (-1)^{r+s} \binom{j}{r} \binom{n-j}{s} f\left(\frac{i+r}{2n}, \frac{k+s}{2n}\right) .$$

Setzt man $i+r =: p$ und $k+s =: q$, so wird

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{j}{i} \binom{n-j}{k} F(Q_{ik}^j) = \\ & = \sum_{p=0}^{2j} \sum_{r=0}^{n-j} \sum_{q=0}^{2n-2j} \sum_{s=0}^{n-j} (-1)^{r+s} \binom{j}{r} \binom{n-j}{s} \binom{j}{p-r} \binom{n-j}{q-s} f\left(\frac{p}{2n}, \frac{q}{2n}\right) . \end{aligned}$$

Nun gilt für natürliche Zahlen u, v die Beziehung
(vgl. [23], S. 256)

$$\sum_{m=0}^u (-1)^m \binom{u}{m} \binom{u}{v-m} = \begin{cases} 0 & (v \text{ ungerade}) \\ (-1)^{v/2} \binom{u}{v/2} & (v \text{ gerade}) . \end{cases}$$

Daraus folgt :

$$\sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{j}{i} \binom{n-j}{k} F(Q_{ik}^j) =$$

$$= \sum_{p=0}^j \sum_{q=0}^{n-j} (-1)^{p+q} \binom{j}{p} \binom{n-j}{q} f\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) = F(Q^j), \text{ und somit}$$

$$(1) \quad D_j^n(Q^j, f) = 2^{-n} \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{j}{i} \binom{n-j}{k} D_j^n(Q_{ik}^j, f).$$

Wegen $\sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{j}{i} \binom{n-j}{k} = 2^j 2^{n-j} = 2^n$ folgt daraus:

$$D_j^n(Q^j, f) = \sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} a_{ik}^j D_j^n(Q_{ik}^j, f).$$

mit $a_{ik}^j = 2^{-n} \binom{j}{i} \binom{n-j}{k}$ und $\sum_{i=0}^j \sum_{k=0}^{n-j} a_{ik}^j = 1$.

Aus Gleichung (1) ergibt sich:

$$\min_{\substack{0 \leq i \leq j \\ 0 \leq k \leq n-j}} D_j^n(Q_{ik}^j, f) \leq D_j^n(Q^j, f) \leq \max_{\substack{0 \leq i \leq j \\ 0 \leq k \leq n-j}} D_j^n(Q_{ik}^j, f).$$

II) Verschwindet $\frac{\mathcal{Y}_x^{n_f} \mathcal{Y}_y^{n-j}}{\mathcal{Y}_x^n \mathcal{Y}_y^{n-j}}$ identisch in Q , so

verschwindet auch $F(Q^j)$.

Beweis. Es sei $Q_i^j := \{Q_{ik}^j : 0 \leq i \leq j, 0 \leq k \leq n-j\}$, und es sei $Q_i^j(j)$ das Element von Q_i^j , für welches gilt: $D_j^n(Q_i^j(j), f) = \max_{\substack{0 \leq i \leq j \\ 0 \leq k \leq n-j}} D_j^n(Q_{ik}^j, f)$. Verfährt man

mit $Q_1^j(j)$ wie zuvor mit Q^j , so erhält man für $D_j^n(Q_1^j(j), f)$ wieder eine Darstellung der Form (1) mit Teilgebieten $Q_{ik}^1(j)$ von $Q_1^j(j)$. Unter diesen sei $Q_2^j(j)$ dasjenige Teilgebiet von $Q_1^j(j)$, für welches gilt: $D_j^n(Q^j(j), f) = \max_{i,k} D_j^n(Q_{ik}^1(j), f)$. Setzt man diesen Prozeß fort, so erhält man eine Folge $Q_1^j(j), Q_2^j(j), Q_3^j(j), \dots$ von Teilgebieten von Q^j mit den Eigenschaften:

$Q_{r+1}^j(j) \subset Q_r^j(j)$, $D_j^n(Q_{r+1}^j(j), f) = \max_{i,k} D_j^n(Q_{ik}^r(j), f)$
 $(r = 1, 2, \dots)$. Es sei $\{(x'_{0j}, y'_{0j})\} := \bigcap_{r \in \mathbb{N}} Q_r^j(j)$. Dann gilt die folgende Beziehung:

$$D_j^n(Q^j, f) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} D_j^n(Q_r^j(j), f) = \frac{\mathcal{J}_x^n f}{\mathcal{J}_x^j \mathcal{J}_y^{n-j}}(x'_{0j}, y'_{0j}) = 0.$$

Analog sei $Q_1''(j)$ das Element aus $\mathcal{Q}^j$, für welches gilt: $D_j^n(Q_1''(j), f) = \min_{i,k} D_j^n(Q_{ik}(j), f)$. Unterwirft man $Q_2''(j)$ dem gleichen Prozeß wie $Q_1^j(j)$, so erhält man eine Folge $Q_1''(j), Q_2''(j), \dots$ von Teilgebieten von Q^j mit folgenden Eigenschaften:

$Q_{s+1}''(j) \subset Q_s''(j)$, $D_j^n(Q_s''(j), f) = \min_{i,k} D_j^n(Q_{ik}^{s-1}(j), f)$,
 $(s = 1, 2, \dots; Q_{ik}^{s-1}$ Teilgebiet von $Q_{s-1}''(j)$, $Q_0''(j) = Q^j)$.

Es sei $\{(x''_{0j}, y''_{0j})\} := \bigcap_{s \in \mathbb{N}} Q_s''(j)$. Dann gilt:

$$D_j^n(Q^j, f) \geq \lim_{s \rightarrow \infty} D_j^n(Q_s''(j), f) = \frac{\mathcal{J}_x^n f}{\mathcal{J}_x^j \mathcal{J}_y^{n-j}}(x''_{0j}, y''_{0j}) = 0.$$

Daraus folgt $D_j^n(Q^j, f) = 0$ und - wegen Gleichung (1) -

$D_j^n(Q_{ik}^j, f) = 0$. Da sich diese Größen nur durch konstante Faktoren von $F(Q^j)$ und $F(Q_{ik}^j)$ unterscheiden, ergibt sich somit die Behauptung von II) .

III) Man definiere nun die Punkte (x_{ji}, y_{jk}) durch:
 $(x_{ji}, y_{jk}) := (\frac{i}{2n}, \frac{k}{2n})$ ($i = 0, 1, \dots, 2j$; $k = 0, 1, \dots, 2n-2j$;
 $j = 0, 1, \dots, n$) . Durch die Gitterpunkte $(x_{j \ 2i}, y_{j \ 2k})$
 $(i = 0, 1, \dots, j-1$; $k = 0, 1, \dots, n-j-1$; $j = 0, 1, \dots, n)$
 lege man nach der Formel von NEWTON ein Polynom P_{n-1} in
 x und y , welches höchstens den Grad $n-1$ hat und in
 den Stützstellen $(x_{j \ 2i}, y_{j \ 2k})$ gerade die Werte
 $f(x_{j \ 2i}, y_{j \ 2k})$ ($i = 0, 1, \dots, j-1$; $k = 0, 1, \dots, n-j-1$;
 $j = 0, 1, \dots, n$) annimmt (vgl. [38], S. 115) . Bildet man
 nun die Funktion $\hat{f} := f - P_{n-1}$ und führt mit $\hat{f}$ das
 gleiche Verfahren durch wie mit f in den Abschnitten
 I) und II) , so erhält man die Gleichungen

$$\hat{F}(Q_{ik}^j) = \hat{F}(Q^j) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, j \ ; \ k = 0, 1, \dots, n-j \ ; \ j = 0, 1, \dots, n) .$$

Dabei sind die Ausdrücke $\hat{F}(Q^j)$ und $\hat{F}(Q_{ik}^j)$ analog zu $F(Q_{ik}^j)$ und $F(Q^j)$ mit $\hat{f}$ gebildet. Aus der Konstruktion von $\hat{f}$ folgt, daß gilt:

$$\hat{f}(x_{j \ 2i}, y_{j \ 2k}) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, j-1 \ ; \ k = 0, 1, \dots, n-j-1 \ ; \ j = 0, 1, \dots, n)$$

Es soll nun gezeigt werden, daß $\hat{f}$ auch in den übrigen Gitterpunkten des Dreiecks verschwindet.

Es sei zunächst $j = 0$. Dann erhält man aus $\hat{F}(Q_{ok}^0) = 0$

($k = 0, 1, \dots, n$) ein homogenes System von $n+1$ Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten $\hat{f}(0, \frac{1}{2n}), \dots, \hat{f}(0, \frac{2n-1}{2n}), \hat{f}(0, 1)$ mit dem Koeffizientenschema

$$\begin{array}{cccccccc}
 - \binom{n}{1} & - \binom{n}{3} & - \binom{n}{5} & - \binom{n}{7} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \binom{n}{0} & \binom{n}{2} & \binom{n}{4} & \binom{n}{6} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & - \binom{n}{1} & - \binom{n}{3} & - \binom{n}{5} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (-1)^n \binom{n}{n} .
 \end{array}$$

Wendet man das Determinantenkriterium von HURWITZ ([13], S. 274) auf das Polynom $(y+1)^{n+1}$ an, so ergibt sich, daß die Determinante dieser Matrix nicht verschwindet. Das gegebene System hat also nur die triviale Lösung. Es gilt :

$$\hat{f}(0, \frac{1}{2n}) = \hat{f}(0, \frac{3}{2n}) = \dots = \hat{f}(0, \frac{2n-1}{2n}) = \hat{f}(0, 1) = 0 .$$

Analog erhält man für $j = n$ aus $\hat{F}(Q_{i0}^n) = 0$ ($i = 0, \dots, n$) daß auch die Werte $\hat{f}(\frac{1}{2n}, 0), \dots, \hat{f}(\frac{2n-1}{2n}, 0), \hat{f}(1, 0)$ verschwinden.

Ist nun $n = 2$, so erhält man unter Berücksichtigung der vorangehenden Ausführungen für $j = 0$ und $j = 1$ das folgende Gleichungssystem für $j = 1$:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) &= 0, \quad \hat{f}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) - \hat{f}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 0, \quad \hat{f}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) - \hat{f}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 0, \\
 \hat{f}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) - \hat{f}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) - \hat{f}(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) + \hat{f}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= 0. \quad \text{Dieses System}
 \end{aligned}$$

hat offenbar nur die triviale Lösung.

Für $n > 2$ betrachte man die Gebiete Q^1 und Q^{n-1} . Diese enthalten insgesamt $6n-7$ Gitterpunkte, in welchen die Werte von $\hat{f}$ unbekannt sind. Sie sind durch die Gleichungen $\hat{F}(Q_{ik}^j) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, j$, $k = 0, 1, \dots, n-j$; $j = 1, n-1$) sowie durch die Gleichungen $\hat{F}(Q_{ok}^2) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$) und $\hat{F}(Q_{io}^{n-2}) = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-2$) verbunden. Man nummeriere nun die Unbekannten wie folgt: $\hat{f}(\frac{1}{2n}, \frac{2n-2}{2n}) =: b_1, \dots, \hat{f}(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}) =: b_{2n-2}$, $\hat{f}(\frac{2}{2n}, \frac{1}{2n}) =: b_{2n-1}, \dots, \hat{f}(\frac{2n-2}{2n}, \frac{1}{2n}) =: b_{4n-5}$, $\hat{f}(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}) =: b_{4n-4}$, $\hat{f}(\frac{1}{n}, \frac{2n-3}{2n}) =: b_{4n-3}, \dots, \hat{f}(\frac{2n-3}{2n}, \frac{1}{n}) =: b_{6n-8}$, $\hat{f}(\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}) =: b_{6n-7}$. Für diese $6n-7$ Unbekannten erhält

man ein homogenes System von $6n-2$ Gleichungen. Analog behandle man Q^2 und Q^{n-2} , sodann Q^3 und Q^{n-3} usw. Nach insgesamt $\left[\frac{n}{2}\right]$ -maliger Durchführung des Verfahrens ($\left[\frac{n}{2}\right] =: r$ die größte ganze Zahl, welche nicht größer ist als $\frac{n}{2}$) ist das System der Q^j ausgeschöpft. Man erhält für $(n-1)(\frac{3}{2}n+1)$ Unbekannte ein System von $\frac{4}{3}r^3 + 5r^2 + \frac{5}{3}r$ ($n = 2r$) bzw. $\frac{4}{3}r^3 + 6r^2 + \frac{14}{3}r$ ($n = 2r+1$) Gleichungen. Nach einem Satz der klassischen linearen Algebra besitzt das vorliegende System genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn alle $((n-1)(\frac{3}{2}n+1))$ -rei-

Man vgl. [34] oder O. H. KELLER, Analytische Geometrie und lineare Algebra, Berlin 1957.

higen Unterdeterminanten verschwinden, aber nicht alle $((n-1)(\frac{3}{2}n+1)-1)$ -reihigen. Auf Grund des Konstruktionsverfahrens und der Eigenschaften der Koeffizienten ist es stets möglich, aus dem erhaltenen System ein Teilsystem von $(n-1)(\frac{3}{2}n+1)$ Gleichungen auszusondern, dessen Koeffizientendeterminante von Null verschieden ist. Da die beiden Unbekannten b_{4n-4} und b_{6n-7} nur in je einer Gleichung auftreten, ist es daher stets möglich, eine $((n-1)(\frac{3}{2}n+1)-1)$ -reihige Unterdeterminante zu finden, welche nicht verschwindet. Daher hat $\hat{f}$ in allen betrachteten Gitterpunkten den Wert Null.

Analog beweist man die Behauptung für die andere Hälfte von $Q = [0,1] \times [0,1]$. Daraus ergibt sich dann auch die Behauptung für die Gitterpunkte mit den Koordinaten $(\frac{2k+1}{n}, 1 - \frac{2k+1}{n})$ auf der Diagonalen von Q .

IV) Wiederholt man nun das ganze Beweisverfahren m -mal, indem man die durch Halbierung der Seiten von Q entstehenden Teilquadrate von Q analog behandelt usw., so erhält man schließlich $\hat{f}(x,y) = 0$ für alle Punkte $(x,y) \in Q$, deren Koordinaten sich als dyadische Brüche m -ter Ordnung darstellen lassen. Aus der Stetigkeit von f folgt dann die Behauptung für Q . Die Übertragung auf ein beliebiges Rechteck in G bringt keine neuen Schwierigkeiten. Da G offen ist, ergibt sich somit die Behauptung für G . Aus der Stetigkeit von f folgt dann der Satz für $\bar{G}$.

LITERATUR.

- [1] S. BOCHNER - K. CHANDRASEKHARAN, Fourier transforms, Princeton 1949.
- [2] P. L. BUTZER, Zur Frage der Saturationsklassen singulärer Integraloperatoren, Math. Z. 70 (1958), 93 - 112.
- [3] P. L. BUTZER, On some theorems of HARDY, LITTLEWOOD and TITCHMARSH, Math. Ann. 142 (1961), 259 - 269.
- [4] P. L. BUTZER, Beziehungen zwischen den Riemannschen, Taylorschen und gewöhnlichen Ableitungen reellwertiger Funktionen, Math. Ann. 144 (1961), 275 - 298.
- [5] P. L. BUTZER and W. KOZAKIEWICZ, On the Riemann derivatives for integrable functions, Canad. J. Math. 6 (1954), 572 - 581.
- [6] P. L. BUTZER and H. G. TILLMANN, Approximation theorems for semigroups of bounded linear transformations, Math. Ann. 140 (1960), 256 - 262.
- [7] A. L. CAUCHY, Leçons sur le calcul différentiel, 9ème leçon: Théorèmes de Maclaurin et de Taylor, Paris 1829 (Oeuvres complètes, IIe série, tome IV, Paris 1899).
- [8] A. DENJOY, Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur, Fund. Math. 25 (1935), 273 - 326.
- [9] A. DINGHAS, Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Ann. Acad. Scient. Fenn. A I 375 (1966).

- [10] G. M. FICHTENHOLZ, Differential- und Integralrechnung, Bd. I, Berlin 1964.
- [11] L. M. GRAVES, The theory of functions of real variables, New York - Toronto - London 1956.
- [12] E. HILLE, Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. XXXI, New York 1948.
- [13] A. HURWITZ, Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt, Math. Ann. 46 (1895), 273 - 284.
- [14] C. KASIMATIS, Functions which have generalized Riemann derivatives, Canad. J. Math. 10 (1958), 413 - 420.
- [15] E. LANDAU, Einführung in die Differential- und Integralrechnung, Groningen 1934.
- [16] A. MARCHAUD, Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles, J. Math. pures appl. (9) 6 (1927), 337 - 425.
- [17] J. MARCINKIEWICZ and A. ZYGMUND, On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series, Fund. Math. 26 (1936), 1 - 43.
- [18] S. N. MUKHOPADHYAY, On Schwarz differentiability II, Rev. Roum. Math. pures appl. 9 (1964), 859 - 862.
- [19] S. N. MUKHOPADHYAY, On Schwarz differentiability III, Colloq. Math. 17 (1967), 93 - 97.
- [20] S. N. MUKHOPADHYAY, On Schwarz differentiability IV, Acta Math. Acad. Scient. Hung. 17 (1966), 129 - 136.

- [21] S. N. MUKHOPADHYAY, On Schwarz differentiability V, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 542 - 544.
- [22] I. P. NATANSON, Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, 2. Aufl., Berlin 1961.
- [23] E. NETTO, Lehrbuch der Combinatorik, Leipzig und Berlin 1927.
- [24] W. OLIVER, The exact Peano derivative, Trans. Amer. Math. Soc. 76 (1954), 444 - 456.
- [25] G. PEANO, Une nouvelle forme du reste dans la formule de Taylor, Mathesis, t. IX, A. 1889, 182 - 183 (Opere scelte, Bd. I, Roma 1957, 95 - 96).
- [26] W. T. REID, Integral criteria for solutions of linear differential equations, Duke Math. J. 12 (1945) 685 - 694.
- [27] B. RIEMANN, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Habilitationsschrift, Abhandl. Königl. Ges. Wissensch. Göttingen Bd. 13 (1854) (Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß, Leipzig 1876, 213 - 251).
- [28] M. RIESZ, Über summierbare trigonometrische Reihen, Math. Ann. 71 (1912), 54 - 75.
- [29] S. SAKS, On the generalized derivatives, J. London Math. Soc. 7 (1932), 247 - 251.
- [30] O. SCHLÖMILCH, Compendium der höheren Analysis, Bd. I, 5. Aufl., Braunschweig 1881.
- [31] L. SCHWARTZ, Theorie des distributions, Paris 1966.

- [32] H. A. SCHWARZ, Über ein vollständiges System von-
einander unabhängiger Voraussetzungen zum Beweise
des Satzes $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Gesammel-
te mathematische Abhandlungen Bd. II, Berlin 1890,
275 - 284.
- [33] H. A. SCHWARZ, Beweis eines für die Theorie der
trigonometrischen Reihen in Betracht kommenden
Hilfssatzes, Gesammelte mathematische Abhandlungen
Bd. II, Berlin 1890, 341 - 343 .
- [34] E. SPERNER, Einführung in die analytische Geometrie
und Algebra, Bd. I , 2. Aufl., Göttingen 1959 .
- [35] CH. J. DE LA VALLEE-POUSSIN, Sur l'approximation des
fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées
par des polynomes et des suites limitées de Fourier,
Bull. Acad. Royale Belgique (1908), 193 - 254
(Fortschr. Math. 39 (1908), 329 - 331).
- [36] CH. J. DE LA VALLEE-POUSSIN, Cours d'analyse infini-
tésimale, 4ème édition, Paris - Louvain 1921/22 .
- [37] S. VERBLUNSKY, The generalized fourth derivative,
J. London Math. Soc. 6 (1931), 82 - 84.
- [38] F. A. WILLERS, Methoden der praktischen Analysis,
3. Aufl., Berlin 1957 .
- [39] A. ZYGMUND, Trigonometric series, Vol. II , 2nd
edition, Cambridge 1959 .

Lebenslauf.

Am 20. Juli 1938 wurde ich in Isny im Allgäu als Sohn des Apothekers Richard Friedel und seiner Ehefrau Elisabeth, geb Mauz, geboren. Von 1944 bis 1948 besuchte ich die Volksschule und anschließend bis 1954 das Progymnasium in Isny. Die Oberstufe der höheren Schule absolvierte ich am Gymnasium Wilhelmsdorf, Kreis Ravensburg, wo ich im Februar 1957 die Reifeprüfung ablegte. Vom Wintersemester 1957/58 an studierte ich an der Freien Universität Berlin Mathematik und Physik. Im Sommersemester 1959 war ich an der Universität Tübingen immatrikuliert. An der Freien Universität legte ich im November 1960 die Diplomvorprüfung und im Juli 1963 die Diplomprüfung in Mathematik ab. Im akademischen Jahr 1963/64 setzte ich das Studium an der Universität Nancy fort. Anschließend arbeitete ich als Mathematiker in einem Industriebetrieb in Frankfurt am Main. Vom 1. Mai 1965 an war ich Verwalter einer Assistentenstelle am I. Mathematischen Institut der Freien Universität Berlin. Am 1. Februar 1967 wurde ich zum Wissenschaftlichen Assistenten ernannt.

Berlin, den 25. April 1968.

Gerhard Friedel

